Faculté des Sciences et Techniques Tanger

Département de Mathématiques

Maths 121 Janvier 2009

Contrôle CC2 (2 Heures)

-1 pour toute réponse non logique ou sans justification.

Exercice 1

Etudier l'existence et la limite éventuelle en $(0,0)$ des fonctions suivantes :

$$a)\ \frac{y^3}{x} \qquad b)\ \frac{yx}{x-y} \qquad c)\ \frac{x^2+y^2}{|x|+|y|}$$

Exercice 2

Soit f une fonction définie par :

$$f(x,y)=\begin{cases} y^2\cos(\frac{x}{y}) \text{ si } y\neq 0 \\ 0 \text{ si } y=0 \end{cases}$$

1. Etudier la continuité de f sur $\mathbb{R}^2$.
2. Trouver les dérivées partielles de f au point (x,y) avec $y\neq 0$ et au point $(x,0)$.
3. Etudier la différentiabilité de f au point (x,y) avec $y\neq 0$ et au point $(x,0)$.
4. Montrer que $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ est continue en tout point (x,y) avec $y\neq 0$ et au point $(0,0)$.
5. Montrer que $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ n'est pas continue au point $(x_0,0)$ avec $x_0\neq 0$ (Construire une suite $(x_n,y_n)_n$ qui converge vers $(x_0,0)$ mais $f(x_n,y_n)$ ne converge pas vers $f(x_0,0)=0$).

Exercice 3

Identifier les extremums et les points d'inflexion, s'ils existent, de la fonction $f(x,y)=ln(2y(x-1)+1)$

Exercice 4 V

Soit la fonction $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y)=x\sin(y)+y\cos(x)+x+y$$

1. Montrer que f définit une fonction implicite φ de classe C^2 au voisinage de $(0,0)$.
2. Calculer $\varphi(0)$ et $\varphi'(0)$.
3. Déterminer un developpement limité de φ au voisinage de zéro à l'ordre 2.

Exercice 1

a/ Pour $y = x$ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^3}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^3}{x} = \lim\limits_{0} x^2 = 0$

Pour $y = \sqrt[3]{x}$ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^3}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{x} = 1$

la limite n'existe pas car elle depend du chemin suivi

b/ Pour $y = x$ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{yx}{x-y} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2}{0} = \infty$

Pour $y = 2x$ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x-y} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{2x^2}{x-2x} = \lim\limits_{0} \frac{2x^2}{-x} = 0$

donc la limite n'existe pas

c/ On a $(|x|+|y|)^2 = x^2+y^2+2|x||y| \geq x^2+y^2 \Rightarrow |x|+|y| \geq \sqrt{x^2+y^2}$

$\Rightarrow \frac{1}{|x|+|y|} \leq \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \Rightarrow \frac{x^2+y^2}{|x|+|y|} \leq \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \Rightarrow 0 \leq \frac{x^2+y^2}{|x|+|y|} \leq \sqrt{x^2+y^2}$

Or $\lim\limits_{(0,0)} \sqrt{x^2+y^2} = 0$ donc $\lim\limits_{(0,0)} \frac{x^2+y^2}{|x|+|y|} = 0$

Exercice $\quad f(x,y) = y^2\cos\left(\frac{x}{y}\right) \quad y \neq 0 \quad ; \quad f(x,y) = 0 \quad ; \text{si } y = 0$

1/ * Continuité sur $D = \{(a,b) \; ; \; b \neq 0\}$

Les fonctions $(x,y) \xrightarrow{f_1} \frac{x}{y}$, $x \xrightarrow{f_2} \cos x$; $(x,y) \xrightarrow{f_3} y^2$ sont continues respectivement sur D, $\mathbb{R}$, D alors $f = f_3 \times f_2 \circ f_1$ est continue sur D

* Continuité en $(a,0)$; $a \in \mathbb{R}$

$\forall y \neq 0 \quad |f(x,y)| = |y^2 \cos\frac{x}{y}| = y^2 |\cos\frac{x}{y}| \leq y^2 \qquad (|\cos X| \leq 1)$

On a $\lim_{(x,y)\to(a,0)} y^2 = 0 \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(a,0)} f(x,y) = 0 = f(a,0)$ donc f est continue en $(a,0)$

Par conséquent f est continue sur $\mathbb{R}^2$

2/ i/ Les fonctions $x \longrightarrow f(x,y)$ et $y \longrightarrow f(x,y)$ sont dérivables sur D car les fonctions $x \longmapsto y^2$, $y \longrightarrow \frac{x}{y}$, $x \longmapsto \frac{x}{y}$, $y \longrightarrow y^2$, sont dérivables sur D. et $x \to \cos x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc f admet des dérivées partielles aux points (a,b) avec $b \neq 0$

et $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -y \sin\frac{x}{y}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y\cos\frac{x}{y} - x\sin\frac{x}{y}$

donc $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = -b \sin\frac{a}{b}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 2b\cos\frac{a}{b} - a\sin\frac{a}{b}$

ii/ $\frac{\partial f}{\partial x}(a,0) = \lim_{x\to a} \frac{f(a,0)-f(0,0)}{a-0} = \lim_{x\to a} \frac{0-0}{a} = 0$

$\frac{\partial f}{\partial y}(a,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(a,y)-f(a,0)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{y^2\cos\frac{a}{y}}{y} = \lim_{y\to 0} y\cos\frac{a}{y} = 0$ car $|y\cos\frac{a}{y}| \leq |y|$ et $\lim_{y\to 0}|y| = 0$

donc f admet des dérivées partielles au point $(a,0)$

et $\frac{\partial f}{\partial x}(a,0) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(a,0) = 0$

3/ i/ Les fonctions $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont continues sur D, car elles sont la somme, produit et la composée des fonctions continues sur D, à savoir : $(x,y) \longrightarrow y$, $(x,y) \longrightarrow \sin\frac{x}{y}$, $(x,y) \longrightarrow \cos\frac{x}{y}$. donc f est différentiable sur D

ii/ Différentiabilité en $(a,0)$

Si f est différentiable en $(a,0)$ alors $df_{(a,0)}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,0).x + \frac{\partial f}{\partial y}(a,0).y = 0x + 0y = 0$

De plus $|\varepsilon(x,y)| = \left|\frac{f(x,y) - f(a,0) - df_{(a,0)}(x,y)}{\|(x-a, y-0)\|}\right| = \left|\frac{y^2\cos\frac{x}{y}}{\sqrt{(x-a)^2+y^2}}\right| \leq \frac{y^2}{\sqrt{(x-a)^2+y^2}}$

On pose $\begin{cases} x-a = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ alors $\left|\frac{y^2}{\sqrt{(x-a)^2+y^2}}\right| = \left|\frac{r^2\sin\theta}{r}\right| = |r\sin\theta| \leq r$

$\lim_{r\to 0} r = 0 \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(a,0)} \frac{y^2}{\sqrt{(x-a)^2+y^2}} = 0 \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(a,0)} \varepsilon(x,y) = 0$ donc f est diff. en $(a,0)$

4/ i/ Continuité de $\frac{\partial f}{\partial y}$ sur D

$\frac{\partial f}{\partial y}$ est la somme, produit et la composée des fonctions continues sur D, à savoir

$(x,y) \to x$, $(x,y) \to y$, $(x,y) \to \sin\frac{x}{y}$, $(x,y) \to \cos\frac{x}{y}$

ii/ Continuité de $\frac{\partial f}{\partial y}$ en $(0,0)$

On a $\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| = \left|2y\cos\frac{x}{y} - x\sin\frac{x}{y}\right| \leq \left|2y\cos\frac{x}{y}\right| + \left|x\sin\frac{x}{y}\right| \leq 2|y| + |x|$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} 2|y| + |x| = 0 \Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ donc $\frac{\partial f}{\partial y}$ est cont en $(0,0)$

5/ Montrons $\frac{\partial f}{\partial y}$ est non continue en $(a,0)$; $a \neq 0$

- On a $\lim\limits_{(x,y)\to(a,0)} 2y\cos\frac{x}{y} = 0$ car $\left|2y\cos\frac{x}{y}\right| = |2y|\left|\cos\frac{x}{y}\right| \leq 2|y|$, et $\lim\limits_{(a,0)} 2|y| = 0$

- Montrons que la fonction $g(x,y) = x\sin\frac{x}{y}$ n'a pas de limite en $(a,0)$.

Rappel : F admet une limite l en $(a,b) \Leftrightarrow \forall\, X_n = (x_n, y_n)$ c.v vers (a,b)
$f(X_n)$ c.v vers l

Considérons la suite $(x_n, y_n) = \left(a, \frac{a}{\frac{\pi}{2} - n\pi}\right)$ qui converge vers $(a,0)$ alors que

$g(x_n, y_n) = a\sin\left(\frac{a}{\frac{a}{\frac{\pi}{2}-n\pi}}\right) = a\sin\left(\frac{\pi}{2} - n\pi\right) = \cos(n\pi) = (-1)^n$ n'a pas de limite

donc $\frac{\partial f}{\partial y}$ n'a pas de limite en $(a,0)$ d'où $\frac{\partial f}{\partial y}$ n'est pas cont en $(a,0)$, $a \neq 0$

<u>Exercice 3</u> $f(x,y) = \ln(2y(x-1)+1) = \ln(2xy - 2y + 1)$

* $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2y}{2xy - 2y + 1}$; $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2x-2}{2xy-2y+1}$, $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow (x,y) = (1,0)$

- $r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{-4y^2}{(2xy-2y+1)^2}$; $S = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{2(2xy-2y+1) - 2y(2x-2)}{(2xy-2y+1)^2} = \frac{2}{(2xy-2y+1)^2}$

$t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{-(2x-2)^2}{(2xy-2y+1)^2}$ alors $r(1,0) = 0$; $S(1,0) = 2$, $t(1,0) = 0$

d'où $D = rt - S^2 = -4 < 0 \Rightarrow f$ n'admet pas d'extremums en $(1,0)$

* Si f admet un point d'inflexion en (x,y) alors $d^2 f = 0$

car $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$

Or $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ ne s'annule pas donc f n'admet de point d'inflexion.